新的周期准互补序列集构造方法

陈晓玉[1,2]，王成瑞[1,2]，刘凡[1,2]
（1. 燕山大学信息科学与工程学院，河北 秦皇岛 066004；2. 河北省信息传输与信号处理重点实验室，河北 秦皇岛 066004）

摘　要：为解决完备互补序列集序列数目受限的问题，构造了周期准互补序列集。首先基于循环 Florentine 阵列，应用$\mathbb{Z}_N$上的映射函数构造了几乎最优周期准互补序列集，所构造的周期准互补序列集具有全新的子序列长度；其次基于单重合跳频序列集，定义$\mathbb{Z}_q$到$\mathbb{Z}_{q(q-1)}$上的映射函数，构造了渐近最优周期准互补序列集。对比结果表明，与现有周期准互补序列集相比，所提方法在子序列长度相同时包含更多的序列数目，可以在多载波通信系统中支持更多用户。
关键词：准互补；几乎最优；渐近最优；循环 Florentine 阵列；单重合跳频
中图分类号：TN911.2
文献标志码：A
DOI: 10.11959/j.issn.1000−436x.2023100

New construction method of periodic quasi-complementary sequence set

CHEN Xiaoyu[1,2], WANG Chengrui[1,2], LIU Fan[1,2]
1. College of Information Science & Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China
2. Hebei Province Key Laboratory of Information Transmission and Signal Processing, Qinhuangdao 066004, China

Abstract: To solve the problem that the number of sequences in the complete complementary sequence set is limited, periodic quasi-complementary sequence set was constructed. Firstly, based on the circular Florentine array, the near optimal periodic quasi-complementary sequence set was constructed by using the mapping function on $\mathbb{Z}_N$. The obtained periodic quasi-complementary sequence sets had new subsequence lengths. Secondly, based on the one-coincidence frequency-hopping sequence set, the asymptotically optimal periodic quasi-complementary sequence set was constructed by defining the mapping function from $\mathbb{Z}_q$ to $\mathbb{Z}_{q(q-1)}$. The comparison results show that compared with the existing periodic quasi-complementary sequence sets, the proposed method contains more sequences with the same subsequence length, and can support more users in multi-carrier communication system.
Keywords: quasi-complementary, near optimal, asymptotically optimal, circular Florentine array, one-coincidence frequency-hopping

0　引言

完备互补序列集（PCSS, perfect complementary sequence set）也称相互正交互补序列集（MOCSS, mutually orthogonal complementary sequence set），可以看作二维矩阵的集合，每个二维矩阵表示一个完备互补序列，任意 2 个互补序列对应位置的子序列的互相关函数和为零[1-2]。PCSS 具有理想的相关特性，因此，在许多实际应用，如降低峰均功率比、信道估计、多输入多输出（MIMO）雷达设计等场景中都备受关注。文献[3]首先提出 PCSS 可以应用在异步多载波码分多址（MC-CDMA, multicarrier code-division multiple-access）系统中，理论上可以完全消除多径干扰（MPI, multipath interference）和多址干扰（MAI, multiple access interference）。

异步多载波码分多址系统应用 PCSS 作为扩频

收稿日期：2023−01−26；**修回日期**：2023−04−26
基金项目：国家自然科学基金资助项目（No.62241110）；河北省自然科学基金资助项目（No.F2021203078）；河北省高等学校科学技术研究项目（No.ZD2022026）；河北省重点实验室项目（No.202250701010046）
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.62241110), The Natural Science Foundation of Hebei Province (No.F2021203078), Science and Technology Project of Hebei Education Department (No.ZD2022026), Hebei Key Laboratory Project (No.202250701010046)

序列，为每个用户分配一个特定的互补序列，互补序列的数目决定了系统能支持的用户数目[4]。然而，PCSS 的集合大小受到互补序列的子序列数目的限制，系统所能支持的用户数目有限。Liu 等[5-6]首次提出准互补序列集（QCSS, quasi-complementary sequence set）的概念，QCSS 允许其最大周期相关函数幅值 $\delta_{\max}$ 为一个较小的值，可以解决传统 PCSS 子序列数目受限的问题。文献[5]推导了周期 QCSS 参数 $\delta_{\max}$ 的下界，此下界有助于在多个参数的制约中寻找最优的周期 QCSS。为了支持更多的用户，构造最优或几乎最优的周期 QCSS 至关重要。文献[5]首先利用 Singer 差集构造了渐近最优周期 QCSS。文献[7]改进了文献[5]构造方法，基于几乎差集和差集构造了新的渐近最优周期 QCSS，文献[5]构造方法为其特例。文献[8-9]利用有限域的加法特征和乘法特征构造了多个渐近最优周期QCSS族。文献[10]基于低相关序列集和二元序列支撑集构造了周期 QCSS。文献[11]基于有限域的加法特征提出了小字符集渐近最优周期 QCSS 的构造框架，并基于此框架构造了 3 种小字符集的渐近最优周期 QCSS。现有周期 QCSS 的构造方法多数是利用有限域上的加法和乘法特征来实现的，本文通过最大周期汉明相关函数为 1 的序列集与相应的映射函数构造周期 QCSS。

本文首先基于循环 Florentine 阵列（CFA, circular Florentine array），利用 $\mathbb{Z}_N$ 上的映射函数构造了几乎最优周期 QCSS，且该周期 QCSS 在子序列长度为素数情况下能达到渐近最优，所构造的周期 QCSS 具有全新的子序列长度；其次基于单重合跳频序列（OC-FHS, one-coincidence frequency-hopping sequence）集和定义在 $\mathbb{Z}_q$ 到 $\mathbb{Z}_{q(q-1)}$ 上的映射函数，构造了渐近最优周期 QCSS，较现有周期 QCSS 有更多的序列数目。

1 基本概念

本文使用的一些符号定义如下。

1) $\mathbb{Z}_N$ 表示模 N 的整数环。

2) $\mathfrak{C}$ 表示序列集。

3) $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ 表示互补序列。

4) $\boldsymbol{C}$ 表示互补序列子序列。

5) x^* 表示 x 的复共轭。

6) $|x|$ 表示 x 的绝对值。

定义 1 2 个长度为 N 的复数序列 $\boldsymbol{a}=(a_0,a_1,\cdots,a_{N-1})$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_0,b_1,\cdots,b_{N-1})$，其周期相关函数定义为

$$R_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\tau)=\sum_{t=0}^{N-1}a_t b_{t+\tau}^*, 0\leqslant\tau<N \tag{1}$$

其中，$t+\tau$ 为模 N 运算。当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时，$R_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\tau)$ 称为序列 $\boldsymbol{a}$ 的周期自相关函数，记为 $R_{\boldsymbol{a}}(\tau)$。

定义 2 $\mathfrak{C}=\{\boldsymbol{\mathcal{C}}^0,\boldsymbol{\mathcal{C}}^1,\cdots,\boldsymbol{\mathcal{C}}^{K-1}\}$ 是一个包含 K 个序列的集合，每个序列 $\boldsymbol{\mathcal{C}}^k=\{\boldsymbol{C}_0^k,\boldsymbol{C}_1^k,\cdots,\boldsymbol{C}_{M-1}^k\}$ 包含 M 条子序列，每条子序列 $\boldsymbol{C}_m^k=\{c_{m,0}^k,c_{m,1}^k,\cdots,c_{m,N-1}^k\}$ 的长度为 N。则序列 $\boldsymbol{\mathcal{C}}^{k_1},\boldsymbol{\mathcal{C}}^{k_2}\,(0\leqslant k_1,k_2\leqslant K-1)$ 的周期相关函数表示为

$$R_{\boldsymbol{\mathcal{C}}^{k_1},\boldsymbol{\mathcal{C}}^{k_2}}(\tau)=\sum_{m=0}^{M-1}R_{\boldsymbol{C}_m^{k_1},\boldsymbol{C}_m^{k_2}}(\tau), 0\leqslant\tau<N \tag{2}$$

$\mathfrak{C}$ 的最大周期自相关函数的幅值为 $\delta_a=\max\{|R_{\boldsymbol{\mathcal{C}}^k}(\tau)|:0<\tau<N\}$，最大周期互相关函数的幅值为 $\delta_c=\max\{|R_{\boldsymbol{\mathcal{C}}^{k_1},\boldsymbol{\mathcal{C}}^{k_2}}(\tau)|:k_1\neq k_2,0\leqslant\tau<N\}$，最大周期相关函数的幅值为 $\delta_{\max}=\max\{\delta_a,\delta_c\}$。

当 $0<\delta_{\max}\ll MN$ 时，称序列集 $\mathfrak{C}$ 为周期准互补序列集，表示为 $(K,M,N,\delta_{\max})$-QCSS；当 $\delta_{\max}=0$ 时，称序列集 $\mathfrak{C}$ 为完备互补序列集。

定义 3[5] 若序列集 $\mathfrak{C}$ 是 $(K,M,N,\delta_{\max})$-QCSS，则满足

$$\delta_{\max}\geqslant MN\sqrt{\frac{K-M}{(KN-1)M}} \tag{3}$$

其最优因子 ρ 定义为

$$\rho=\frac{\delta_{\max}}{MN\sqrt{\dfrac{K-M}{(KN-1)M}}} \tag{4}$$

若 $\rho=1$，则称序列集 $\mathfrak{C}$ 为最优周期 QCSS；若 $1<\rho\leqslant 2$，则称序列集 $\mathfrak{C}$ 为几乎最优周期 QCSS；当 N 足够大时，若 ρ 趋近于 1，则称序列集 $\mathfrak{C}$ 为渐近最优周期 QCSS。

定义 4[12] 对于一个 r 行 N 列的阵列，其元素取自 N 个符号构成的集合 I，第 i 行记为 $\boldsymbol{\pi}_i=(\pi_i(0),\pi_i(1),\cdots,\pi_i(N-1))$，其中 $0\leqslant i<r$，若该阵列满足如下性质，则称此阵列为循环 Florentine 阵列。

1) 同一行内元素各不相同。

2) 设 $1\leqslant\tau_0\leqslant N-1$，对于集合 I 中的任意 2 个

符号 a、b，至多存在一行满足 $\pi_i(t)=a$ 且 $\pi_i(t+\tau_0)=b$，其中，$0\leqslant t\leqslant N-1$，$t+\tau_0$ 为模 N 运算。

一般而言，CFA 中的 N 个不同的符号可以是任意固定的集合，但本文中，定义其在 $\mathbb{Z}_N$ 上。

对于一个每行包含 $N(N\geqslant 2)$ 个不同符号的 CFA，其最大行数定义为 $F(N)$。

引理 1[12] 对于一个 $F(N)\times N$ 的 CFA，$F(N)$ 有如下性质。

1) 当 N 为偶数时，$F(N)=1$。

2) 当 p 是 N 的最小素数因子时，$p-1\leqslant F(N)\leqslant N-1$。

3) 当 N 是素数时，$F(N)=N-1$。

4) 当 $N\equiv 15 \bmod 18$ 时，$F(N)\leqslant N-3$。

定义 5 设 $F=\{f_0,f_1,\cdots,f_{q-1}\}$ 是一个包含 q 个频点的集合，$\boldsymbol{S}^x=(s_0^x,s_1^x,\cdots,s_{L-1}^x)$ 和 $\boldsymbol{S}^y=(s_0^y,s_1^y,\cdots,s_{L-1}^y)$ 是定义在频点集合 F 上的跳频序列，其中 $s_l^x,s_l^y\in F$。周期汉明相关函数定义为

$$H_{s^x,s^y}=\sum_{l=0}^{L-1}h(s_l^x,s_{l+\tau}^y),0\leqslant\tau<L \tag{5}$$

其中，$h(f_i,f_j)=\begin{cases}1, f_i=f_j\\0, f_i\neq f_j\end{cases}$。

定义 6 设 $\boldsymbol{S}=(s_0,s_1,\cdots,s_{L-1})$ 表示一个周期为 L 的跳频序列，如果在一个周期内序列所有频点都不相同，即满足 $H_{\boldsymbol{S}}(\tau)=0,\tau\neq 0$，则称序列为非重复跳频序列。

定义 7 对于一个非重复跳频序列集，若任意两条序列的最大周期汉明相关函数值为 1，则称该非重复跳频序列集为单重合跳频序列集。

引理 2[13] 取一个素数 p 及有限域 $\mathrm{GF}(p)$ 上度为 n 的本原多项式，取 α 为有限域 $\mathrm{GF}(p^n)$ 上的本原元，构造序列集 $\boldsymbol{\mathcal{S}}=\{\boldsymbol{S}_0,\boldsymbol{S}_1,\cdots,\boldsymbol{S}_{p^n-1}\}$，其中，$\boldsymbol{S}_j=(\alpha^0+a_j,\alpha^1+a_j,\cdots,\alpha^{p^n-2}+a_j),a_j\in\mathrm{GF}(p^n)$，$0\leqslant j\leqslant p^n-1$，则序列集 $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ 是一个 OC-FHS 集。

2 本文构造方法

2.1 基于 CFA 构造周期 QCSS

构造法 1 取一个定义在 $\mathbb{Z}_N$ 上的 $F(N)\times N$ 的 CFA，令 π_k 是该阵列的第 k 行，其中，$0\leqslant k\leqslant F(N)-1$。对于任意 $m\in\mathbb{Z}_N$ 和 $n\in\mathbb{Z}_N$，设映射函数 $f_n^{(k,m)}:\mathbb{Z}_N\to\mathbb{Z}_N$ 为

$$f_n^{(k,m)}(t)=(n\pi_k(t)+mt)\bmod N \tag{6}$$

其中，$0\leqslant t\leqslant N-1$。对于每个 $0\leqslant k\leqslant F(N)-1$，构造序列集 $\mathfrak{C}^k=\{\boldsymbol{\mathcal{C}}^{k,0},\boldsymbol{\mathcal{C}}^{k,1},\cdots,\boldsymbol{\mathcal{C}}^{k,N-1}\}$，表示为

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}^{(k,m)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_0^{(k,m)}\\\boldsymbol{C}_1^{(k,m)}\\\vdots\\\boldsymbol{C}_{N-1}^{(k,m)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{0,0}^{(k,m)} & c_{0,1}^{(k,m)} & \cdots & c_{0,N-1}^{(k,m)}\\c_{1,0}^{(k,m)} & c_{1,1}^{(k,m)} & \cdots & c_{1,N-1}^{(k,m)}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\c_{N-1,0}^{(k,m)} & c_{N-1,1}^{(k,m)} & \cdots & c_{N-1,N-1}^{(k,m)}\end{bmatrix}$$

其中，$c_{n,t}^{(k,m)}=\omega_N^{f_n^{(k,m)}(t)},\omega_N=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}}$。

定理 1 构造法 1 得到的序列集 $\mathfrak{C}^k$ 有如下性质。

1) 对于任意 $0\leqslant k\leqslant F(N)-1$，$\mathfrak{C}^k$ 是一个完备互补序列集。

2) 对于任意 2 个不同的完备互补序列集 $\mathfrak{C}^{k_1}$ 与 $\mathfrak{C}^{k_2}$，其集间互相关函数的上界为 N。即 $\left|\sum_{n=0}^{N-1}R_{\boldsymbol{C}_n^{(k_1,m_1)},\boldsymbol{C}_n^{(k_2,m_2)}}(\tau)\right|\leqslant N$，其中，$0\leqslant k_1\neq k_2\leqslant F(N)-1$，$0\leqslant m_1,m_2\leqslant N-1$，$0\leqslant\tau\leqslant N-1$。

3) 当 N 为奇数时，令 $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}^0\cup\mathfrak{C}^1\cup\cdots\cup\mathfrak{C}^{F(N)-1}$，则 $\mathfrak{C}$ 构成几乎最优周期 $(NF(N),N,N,N)$-QCSS；当 N 是素数时，$\mathfrak{C}$ 为渐近最优周期 QCSS。

证明 取 $\boldsymbol{\mathcal{C}}^{(k_1,m_1)},\boldsymbol{\mathcal{C}}^{(k_2,m_2)}\in\mathfrak{C}$，其中，$0\leqslant k_1,k_2\leqslant F(N)-1$，$0\leqslant m_1,m_2\leqslant N-1$，在不失一般性的前提下，假设 $m_1\leqslant m_2$，则 $\boldsymbol{\mathcal{C}}^{(k_1,m_1)}$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{C}}^{(k_2,m_2)}$ 的周期相关函数为

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{N-1}R_{\boldsymbol{C}_n^{(k_1,m_1)},\boldsymbol{C}_n^{(k_2,m_2)}}(\tau)=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{t=0}^{N-1}\boldsymbol{C}_{n,t}^{k_1,m_1}(\boldsymbol{C}_{n,t+\tau}^{k_2,m_2})^*=\\&\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{t=0}^{N-1}\omega_N^{f_n^{(k_1,m_1)}(t)}\omega_N^{-f_n^{(k_2,m_2)}(t+\tau)}=\\&\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{t=0}^{N-1}\omega_N^{n(\pi_{k_1}(t)-\pi_{k_2}(t+\tau))+t(m_1-m_2)-m_2\tau}\end{aligned} \tag{7}$$

其中，$t+\tau$ 为模 N 运算。

下面将分 4 种情况证明定理 1 的性质 1)。

情况 1 $k_1=k_2,m_1=m_2,\tau=0$

$$\sum_{n=0}^{N-1}R_{\boldsymbol{C}_n^{(k_1,m_1)},\boldsymbol{C}_n^{(k_2,m_2)}}(0)=N^2 \tag{8}$$

情况 2 $k_1=k_2,m_1=m_2,1\leqslant\tau\leqslant N-1$

对于任意 $\tau\neq 0$，由定义 4 可知，$\pi_{k_1}(t)\neq\pi_{k_1}(t+\tau)$，$\pi_{k_1}(t),\pi_{k_1}(t+\tau)\in\mathbb{Z}_N$，因此 $|\pi_{k_1}(t)-\pi_{k_1}(t+\tau)|<N$，则有 $N\nmid(\pi_{k_1}(t)-\pi_{k_1}(t+\tau))$。因此

$$\sum_{n=0}^{N-1} R_{\boldsymbol{C}_n^{(k_1,m_1)},\boldsymbol{C}_n^{(k_2,m_2)}}(\tau)=\omega_N^{-m_2\tau}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{t=0}^{N-1}\omega_N^{n(\pi_{k_1}(t)-\pi_{k_2}(t+\tau))}=0 \tag{9}$$

情况 3　$k_1=k_2, m_1\neq m_2, \tau=0$

因为 $m_1\neq m_2$，又 $0\leqslant m_1<m_2\leqslant N-1$，则 $|m_1-m_2|<N$，所以 $N\nmid(m_1-m_2)$。因此

$$\sum_{n=0}^{N-1} R_{\boldsymbol{C}_n^{(k_1,m_1)},\boldsymbol{C}_n^{(k_2,m_2)}}(0)=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{t=0}^{N-1}\omega_N^{t(m_1-m_2)}=0 \tag{10}$$

情况 4　$k_1=k_2, m_1\neq m_2, 1\leqslant\tau\leqslant N-1$

$$\sum_{n=0}^{N-1} R_{\boldsymbol{C}_n^{(k_1,m_1)},\boldsymbol{C}_n^{(k_2,m_2)}}(\tau)=\sum_{t=0}^{N-1}\omega_N^{t(m_1-m_2)-m_2\tau}\sum_{n=0}^{N-1}\omega_N^{n(\pi_{k_1}(t)-\pi_{k_1}(t+\tau))}=0 \tag{11}$$

从以上 4 种情况可知，对于任意 $0\leqslant k<F(N)$，$\mathfrak{C}^k$ 都是一个完备互补序列集。

下面将对定理 1 的性质 2)进行证明。

当 $k_1\neq k_2$ 时，有

$$\sum_{n=0}^{N-1} R_{\boldsymbol{C}_n^{(k_1,m_1)},\boldsymbol{C}_n^{(k_2,m_2)}}(\tau)=\sum_{t=0}^{N-1}\omega_N^{t(m_1-m_2)-m_2\tau}\sum_{n=0}^{N-1}\omega_N^{n(\pi_{k_1}(t)-\pi_{k_2}(t+\tau))} \tag{12}$$

由定义 4 可知，对于任意 $0\leqslant t\leqslant N-1$，$\pi_{k_1}(t)-\pi_{k_2}(t+\tau)=0$ 至多只有一个解。若此解存在，则将其记为 t_0，即 $\pi_{k_1}(t_0)-\pi_{k_2}(t_0+\tau)=0$。此时

$$\sum_{n=0}^{N-1} R_{\boldsymbol{C}_n^{(k_1,m_1)},\boldsymbol{C}_n^{(k_2,m_2)}}(\tau)=N\omega_N^{-m_2\tau+t_0(m_1-m_2)}+\omega_N^{-m_2\tau}\sum_{0\leqslant t\leqslant N-1,t\neq t_0}\omega_N^{t(m_1-m_2)}\sum_{n=0}^{N-1}\omega_N^{n(\pi_{k_1}(t)-\pi_{k_2}(t+\tau))} \tag{13}$$

由于 $\pi_{k_1}(t),\pi_{k_2}(t+\tau)\in\mathbb{Z}_N$，$\pi_{k_1}(t)\neq\pi_{k_2}(t+\tau)$，$|\pi_{k_1}(t)-\pi_{k_2}(t+\tau)|<N$，则 $N\nmid(\pi_{k_1}(t)-\pi_{k_2}(t+\tau))$，因此，式(13)第三行为零，即对于任意的 $k_1\neq k_2$，$|\sum_{n=0}^{N-1} R_{\boldsymbol{C}_n^{(k_1,m_1)},\boldsymbol{C}_n^{(k_2,m_2)}}(\tau)|\leqslant N$。

下面将对定理 1 的性质 3)进行证明。

由上述证明可知，$\mathfrak{C}$ 可构成 $(NF(N),N,N,N)$-QCSS，假设在此参数情况下 $\mathfrak{C}$ 不能达到几乎最优，即

$$\frac{\delta_{\max}}{MN\sqrt{\dfrac{K-M}{(KN-1)M}}}>2\Rightarrow\frac{N}{N^2\sqrt{\dfrac{NF(N)-N}{(N^2F(N)-1)N}}}>2\Rightarrow\frac{1}{4}>\frac{N^2(F(N)-1)}{N^2F(N)-1}$$

即

$$N^2(4-3F(N))>1 \tag{14}$$

当 N 为奇数时，设 p 是 N 的最小素数因子，$p-1\leqslant F(N)\leqslant N-1$，又因为 $p\geqslant 3$，所以 $F(N)\geqslant 2$，即 $N^2(4-3F(N))<0$ 恒成立，与式(14)矛盾。因此，序列集 $\mathfrak{C}$ 是一个几乎最优周期 $(NF(N),N,N,N)$-QCSS。

当 N 是素数时，最优因子可表示为

$$\rho=\frac{\delta_{\max}}{MN\sqrt{\dfrac{K-M}{(KN-1)M}}}=\frac{N}{N^2\sqrt{\dfrac{N(N-1)-N}{(N^2(N-1)-1)N}}}=\frac{1}{N\sqrt{\dfrac{N-2}{N^3-N^2-1}}} \tag{15}$$

当 N 趋近于无穷时，有

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N\sqrt{\dfrac{N-2}{N^3-N^2-1}}}=1 \tag{16}$$

综上，定理 1 得证。

例 1　取一个 4×5 的 CFA，有

$$\boldsymbol{\pi}_0(\mathbb{Z}_5)=(0,1,2,3,4),\boldsymbol{\pi}_1(\mathbb{Z}_5)=(0,2,4,1,3)$$
$$\boldsymbol{\pi}_2(\mathbb{Z}_5)=(0,3,1,4,2),\boldsymbol{\pi}_3(\mathbb{Z}_5)=(0,4,3,2,1)$$

通过构造法 1，可以得到 4 个完备互补集 $\mathfrak{C}^0,\mathfrak{C}^1,\mathfrak{C}^2,\mathfrak{C}^3$，令 $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}^0\cup\mathfrak{C}^1\cup\mathfrak{C}^2\cup\mathfrak{C}^3$，则 $\mathfrak{C}$ 为 (20,5,5,5)-QCSS，计算其最优因子 $\rho=1.149$，表明 $\mathfrak{C}$ 构成几乎最优周期 QCSS。

2.2　基于 OC-FHS 集构造周期 QCSS

通过计算循环 Florentine 阵列的周期汉明相关函数发现，其周期汉明相关函数最大值为 1，因此循环 Florentine 阵列可视为一种特殊的 OC-FHS 集，下面基于 OC-FHS 给出构造法 2。

构造法 2　选取素数 p 及有限域 $\mathrm{GF}(p)$ 上的度为 n 的本原多项式，α 为 $\mathrm{GF}(p^n)$ 本原元，记 $q=p^n$，通过引理 2 构造 OC-FHS 集 $\boldsymbol{\mathcal{S}}$。对于任意 $m\in\mathbb{Z}_{q-1}$ 和 $n\in\mathbb{Z}_q$，定义映射函数 $f_n^{(k,m)}:\mathbb{Z}_q\to\mathbb{Z}_{q(q-1)}$ 为

$$f_n^{(k,m)}(t)=((q-1)nS_k(t)+qmt)\bmod q(q-1) \tag{17}$$

其中，$0\leqslant t\leqslant q-2$。对于每个 $0\leqslant k\leqslant q-1$，构造序列集 $\mathfrak{C}^k=\{\boldsymbol{C}^{k,0},\boldsymbol{C}^{k,1},\cdots,\boldsymbol{C}^{k,q-2}\}$，表示为

$$\mathcal{C}^{(k,m)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_0^{(k,m)}\\ \boldsymbol{C}_1^{(k,m)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{C}_{q-1}^{(k,m)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{0,0}^{(k,m)} & c_{0,1}^{(k,m)} & \cdots & c_{0,q-2}^{(k,m)}\\ c_{1,0}^{(k,m)} & c_{1,1}^{(k,m)} & \cdots & c_{1,q-2}^{(k,m)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{q-1,0}^{(k,m)} & c_{q-1,1}^{(k,m)} & \cdots & c_{q-1,q-2}^{(k,m)}\end{bmatrix}$$

其中，$c_{n,t}^{(k,m)}=\omega_{q(q-1)}^{f_n^{(k,m)}(t)},\omega_{q(q-1)}=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{q(q-1)}}$。

定理 2 构造法 2 得到的序列集$\mathfrak{C}^k$有如下性质。

1) 对于任意$0\leqslant k\leqslant q-1$，$\mathfrak{C}^k$是一个完备互补序列集。

2) 对于任意 2 个不同的完备互补序列集$\mathfrak{C}^{k_1}$与$\mathfrak{C}^{k_2}$，其集间互相关函数的上界为 q，即$\left|\sum_{n=0}^{q-1}R_{\boldsymbol{C}_n^{(k_1,m_1)},\boldsymbol{C}_n^{(k_2,m_2)}}(\tau)\right|\leqslant q$，其中，$0\leqslant k_1\neq k_2\leqslant q-1$，$0\leqslant\tau\leqslant q-2$，$0\leqslant m_1,m_2\leqslant q-2$。

3) 当$q>2$时，令$\mathfrak{C}=\mathfrak{C}^0\cup\mathfrak{C}^1\cup\cdots\cup\mathfrak{C}^{q-1}$，则$\mathfrak{C}$构成渐近最优周期$(q(q-1),q,q-1,q)$-QCSS。

证明 取$\mathcal{C}^{(k_1,m_1)},\mathcal{C}^{(k_2,m_2)}\in\mathfrak{C}$，其中，$0\leqslant k_1,k_2\leqslant q-1$，$0\leqslant m_1,m_2\leqslant q-2$，且$f_n^{(k,m)}(t)$由式(17)给出，$\mathcal{C}^{(k_1,m_1)}$和$\mathcal{C}^{(k_2,m_2)}$的周期相关函数为

$$\sum_{n=0}^{q-1}R_{\boldsymbol{C}_n^{(k_1,m_1)},\boldsymbol{C}_n^{(k_2,m_2)}}(\tau)=\sum_{n=0}^{q-1}\sum_{t=0}^{q-2}\boldsymbol{C}_{n,t}^{k_1,m_1}(\boldsymbol{C}_{n,t+\tau}^{k_2,m_2})^*=$$
$$\sum_{n=0}^{q-1}\sum_{t=0}^{q-2}\omega_{q(q-1)}^{f_n^{(k_1,m_1)}(t)}\omega_{q(q-1)}^{-f_n^{(k_2,m_2)}(t+\tau)}=$$
$$\sum_{n=0}^{q-1}\sum_{t=0}^{q-2}\omega_q^{(S_{k_1}(t)-S_2(t+\tau))}\omega_{q-1}^{t(m_1-m_2)-m_2\tau}=$$
$$\omega_{q-1}^{-m_2\tau}\sum_{t=0}^{q-2}\omega_{q-1}^{t(m_1-m_2)}\sum_{n=0}^{q-1}\omega_q^{n(S_{k_1}(t)-S_{k_2}(t+\tau))}\tag{18}$$

其中，$t+\tau$为模$(q-1)$运算。

定理 2 的性质 1)和性质 2)的证明与定理 1 的证明类似，在此不再赘述。

下面将对定理 2 的性质 3)进行证明。

令$\mathfrak{C}=\mathfrak{C}^0\cup\mathfrak{C}^1\cup\cdots\cup\mathfrak{C}^{q-1}$，则$\mathfrak{C}$构成$(q(q-1),q,q-1,q)$-QCSS，计算其最优因子

$$\rho=\frac{\delta_{\max}}{MN\sqrt{\frac{K-M}{(KN-1)M}}}=$$
$$\frac{q}{q(q-1)\sqrt{\frac{q(q-1)-q}{(q(q-1)^2-1)q}}}=\frac{1}{(q-1)\sqrt{\frac{q-2}{q(q-1)^2-1}}}=$$
$$\frac{1}{\sqrt{\frac{(q-1)^2(q-2)}{q(q-1)^2-1}}}\tag{19}$$

当 q 趋向于无穷时，有

$$\lim_{q\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{(q-1)^2(q-2)}{q(q-1)^2-1}}}=1\tag{20}$$

因此，$\mathfrak{C}$为渐近最优周期 QCSS。

综上，定理 2 得证。

例 2 对于$\mathrm{GF}(2^3),h(X)=X^3+X+1$是$\mathrm{GF}(2)$上度为 3 的本原多项式，$\alpha$是$\mathrm{GF}(2^3)$的本原元，$\boldsymbol{K}=(1,\alpha,\alpha^2,\alpha+1,\alpha^2+\alpha,\alpha^2+\alpha+1,\alpha^2+1)$，$\boldsymbol{K}$的十进制表示为$\boldsymbol{K}_d=\{1,2,4,3,6,7,5\}$，记为序列$\boldsymbol{S}_0$，序列集$\boldsymbol{\mathcal{S}}=\{\boldsymbol{S}_0,\boldsymbol{S}_1,\cdots,\boldsymbol{S}_7\}$表示为

$$\boldsymbol{S}_0=(1,2,4,3,6,7,5),\ \boldsymbol{S}_1=(0,3,5,2,7,6,4),$$
$$\boldsymbol{S}_2=(3,0,6,1,4,5,7),\ \boldsymbol{S}_3=(5,6,0,7,2,3,1),$$
$$\boldsymbol{S}_4=(2,1,7,0,5,4,6),\ \boldsymbol{S}_5=(7,4,2,5,0,1,3),$$
$$\boldsymbol{S}_6=(6,5,3,4,1,0,2),\ \boldsymbol{S}_7=(4,7,1,6,3,2,0)$$

通过构造法 2 可生成 8 个完备互补序列集$\mathfrak{C}^0,\mathfrak{C}^1,\mathfrak{C}^2,\mathfrak{C}^3,\mathfrak{C}^4,\mathfrak{C}^5,\mathfrak{C}^6,\mathfrak{C}^7$，令序列集$\mathfrak{C}=\mathfrak{C}^0\cup\mathfrak{C}^1\cup\mathfrak{C}^2\cup\mathfrak{C}^3\cup\mathfrak{C}^4\cup\mathfrak{C}^5\cup\mathfrak{C}^6\cup\mathfrak{C}^7$，则$\mathfrak{C}$为$(56,8,7,8)$-QCSS，计算其最优因子$\rho=1.153$。

表 1 给出了当子序列长度逐渐增加时，通过构造法 2 产生的渐近最优 QCSS 参数，由表 1 可以发现，随着子序列长度的增加，所构造的周期 QCSS 的$\delta_{\max}$趋近于 1。

表 1 渐近最优 QCSS 参数

p, n, q 值	K	M	N	$\delta_{\max}$
p=2, n=3, q=8	56	8	7	1.153
p=3, n=2, q=9	72	9	8	1.133
p=2, n=4, q=16	240	16	15	1.069
p=5, n=2, q=25	600	25	24	1.043
p=3, n=3, q=27	702	27	26	1.039
p=7, n=2, q=49	992	32	31	1.033

3 构造方法对比

本节将现有周期 QCSS 与本文提出的两类周期 QCSS 进行了对比，结果如表 2 所示。对比的构造方法中除文献[10]中第一种方法构造了几乎最优周期 QCSS 外，其余方法构造产生的周期 QCSS 均能实现渐近最优，即最优因子趋近于 1。本文所提构造法 1 受所选循环 Florentine 阵列参

表 2 周期 QCSS 参数比较

构造方法	K	M	N	$\delta_{\max}$	约束条件
文献[7]方法	p	$\frac{p-1}{2}$	p	$\frac{p+p^{\frac{1}{2}}}{2}$	p 是素数
文献[8]方法 1	p^n-2	$\frac{p^n-1}{2}$	p^n-1	$\frac{p^n+4p^{\frac{n}{2}}+3}{2}$	p 是奇素数
文献[8]方法 2	$p^{2n}-2$	p^n	$p^{2n}-1$	$p^n(p^{2n}+3)$	p 是素数
文献[9]方法 1	p^n-1	$\frac{p^n-1}{2}$	p^n-1	$\frac{p^n+p^{\frac{n}{2}}}{2}$	p 是奇素数
文献[9]方法 2	p^n-1	p^{n-1}	p^n-1	$p^{n-\frac{1}{2}}$	p 是素数，$n>1$
文献[9]方法 3	$p^{2n}-1$	p^n	$p^{2n}-1$	$p^{\frac{3n}{2}}$	p 是素数
文献[10]方法 1	p^n	p^{n-2}	p^n-1	$3\left(p^{\frac{n}{2}-2}+p^{n-2}\right)$	$p=2$
文献[10]方法 2	p^n-1	$\frac{p^n-1}{2}$	p^n-1	$\frac{p^n+p^{\frac{n}{2}}}{2}$	p 是奇素数
文献[11]方法 1	p^n	$\frac{p^n-1}{2}$	p^n-1	$\frac{p^n+1}{2}$	p 是奇素数且 $p^n>3$
文献[11]方法 2	p^n	$\frac{p^n-p^{n-1}}{2}$	p^n-1	$\frac{p^n+p^{n-1}}{2}$	p 是奇素数且 $p^n>3$
本文构造法 1	$NF(N)$	N	N	N	N 是奇数
本文构造法 2	$p^n(p^n-1)$	p^n	p^n-1	p^n	p 是素数且 $p^n\geqslant 3$

数的影响，在 N 为素数情况下能实现渐近最优周期 QCSS，在 N 为奇数情况下只能实现几乎最优周期 QCSS；构造法 2 能够实现渐近最优周期 QCSS。

现有周期 QCSS 的构造方法多是利用有限域上的加法特征与乘法特征实现的，子序列长度与素数或素数的幂次有关，本文提出的构造法 1 基于 $NF(N)$ 阶循环 Florentine 阵列和 $\mathbb{Z}_N$ 上的映射函数，可以生成 $(NF(N),N,N,N)$-QCSS，其中包含现有构造方法尚未覆盖的新子序列长度的周期 QCSS，如子序列长度为 21、25、33、35、39 等的周期 QCSS；本文构造法 2 虽然子序列长度形式也受限于素数或素数的幂次，但与现有构造方法相比，本文提出的构造法 2 可以在子序列长度相同时生成更多的序列，例如，当 p=5，n=1 时，文献[11]的方法 1 生成的序列集为 (5,2,4,3)-QCSS，而本文构造法 2 则可以生成 (20,5,4,5)-QCSS，在相同子序列长度下序列数目更多，可以在多载波通信系统中支持更多的用户。

文献[11]提出的构造方法在子序列长度为 p^n-1 时其字符集大小为 p，与其相比，本文所提 2 种构造方法使用的字符集较大，构造法 1 在子序列长度为 N 时字符集大小为 N，构造法 2 在子序列长度为 p^n-1 时字符集大小为 $p^n(p^n-1)$。

4 结束语

本文首先基于循环 Florentine 阵列，利用 $\mathbb{Z}_N$ 上的映射函数构造了一类几乎最优周期 QCSS，当子序列长度为素数时能达到渐近最优；其次基于单重合跳频序列集与定义在 $\mathbb{Z}_q$ 到 $\mathbb{Z}_{q(q-1)}$ 上的映射函数，构造了渐近最优周期 QCSS。2 种构造方法获得了具有新参数的周期 QCSS，可以作为扩频序列应用到多载波通信系统中以适应更多的应用场景。

参考文献：

[1] RATHINAKUMAR A, CHATURVEDI A K. Complete mutually

orthogonal Golay complementary sets from reed-muller codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2008, 54(3): 1339-1346.
[2] SUEHIRO N, HATORI M. N-shift cross-orthogonal sequences[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1988, 34(1): 143-146.
[3] CHEN H H, YEH J F, SUEHIRO N. A multicarrier CDMA architecture based on orthogonal complementary codes for new generations of wideband wireless communications[J]. IEEE Communications Magazine, 2001, 39(10): 126-135.
[4] LIU Z L, GUAN Y L, CHEN H H. Fractional-delay-resilient receiver design for interference-free MC-CDMA communications based on complete complementary codes[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2015, 14(3): 1226-1236.
[5] LIU Z L, PARAMPALLI U, GUAN Y L, et al. Constructions of optimal and near-optimal quasi-complementary sequence sets from singer difference sets[J]. IEEE Wireless Communications Letters, 2013, 2(5): 487-490.
[6] LIU Z L, GUAN Y L, MOW W H. A tighter correlation lower bound for quasi-complementary sequence sets[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2014, 60(1): 388-396.
[7] LI Y B, LIU T, XU C Q. Constructions of asymptotically optimal quasi-complementary sequence sets[J]. IEEE Communications Letters, 2018, 22(8): 1516-1519.
[8] LI Y B, TIAN L Y, LIU T, et al. Two constructions of asymptotically optimal quasi-complementary sequence sets[J]. IEEE Transactions on Communications, 2019, 67(3): 1910-1924.
[9] LI Y B, TIAN L Y, LIU T, et al. Constructions of quasi-complementary sequence sets associated with characters[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2019, 65(7): 4597-4608.
[10] 陈晓玉, 彭秀英, 王成瑞, 等. 周期准互补序列集构造法[J]. 电子与信息学报, 2022, 44(11): 4034-4040.
CHEN X Y, PENG X Y, WANG C R, et al. Constructions of periodic quasi-complementary sequence sets[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2022, 44(11): 4034-4040.
[11] LUO G J, CAO X W, SHI M J, et al. Three new constructions of asymptotically optimal periodic quasi-complementary sequence sets with small alphabet sizes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2021, 67(8): 5168-5177.
[12] ZHANG D, HELLESETH T. Sequences with good correlations based on circular Florentine arrays[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2022, 68(5): 3381-3388.
[13] REED I. Kth-order near-orthogonal codes (corresp.)[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1971, 17(1): 116-117.

[作者简介]

陈晓玉（1983– ），女，内蒙古赤峰人，博士，燕山大学副教授、硕士生导师，主要研究方向为序列设计、无线通信技术。

王成瑞（1999– ），男，山东泰安人，燕山大学硕士生，主要研究方向为序列设计。

刘凡（1998– ），女，河北唐山人，燕山大学硕士生，主要研究方向为序列设计。